LINEARE ALGEBRA

ÜBUNGSBLATT 3

Man betrachtet immer einen Körper K.

1. Man zeige, dass $(AB)^t = B^t A^t$ für jedewelche zwei Matrizen A und B für die, das Produkt AB definiert ist.

2. Für $m \in \mathbb{N}^*$, bezeichne man mit $e_1, e_2, \ldots, e_m$ die Spalten der Matrix I_m. Das heisst, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t, e_2 = (0, 1, \ldots, 0)^t, \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1)^t$. (Achtung: eine transponierte Zeile eine Spalte ist!) Man betrachte die Matrizen

$$E_1 = E_1(m, i_1, i_2) = (e_1, \ldots, e_{i_2}, \ldots, e_{i_1}, \ldots, e_n) \text{ wobei } 1 \leq i_1 < i_2 \leq n,$$

$$\begin{aligned} E_2 = E_2(m, i_1, i_2, \alpha) =& (e_1, \ldots, e_{i_1}, \ldots, e_{i_2} + \alpha e_{i_1}, \ldots, e_n) \\ & \text{wobei } 1 \leq i_1, i_2 \leq n, \alpha \in K, \end{aligned}$$

$$E_3 = E_3(m, i, \alpha) = (e_1, \ldots, \alpha e_i, \ldots, e_n) \text{ wobei } 1 \leq i \leq n, \alpha \in K^*.$$

Die Matrizen E_1, E_2, E_3heissen *elementär* und sie aus I_m erhalten werden durch die Vertauschung zweier Spalten e_{i_1} und e_{i_2}, bzw die Addition der Spalte e_{i_1} multipliziert mit α zur Spalte e_{i_2}, oder die Mltiplikation der Spalte e_i mit α. Sei $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$. Man gelten die Aussagen:

a) Die Matrizen $E_1 A$, $E_2 A$ und $E_3 A$ werden durch die elementäre Zeilenumformungen aus A erhalten.
b) Die Matrizen AE_1, AE_2 und AE_3 werden durch die elementäre Spaltenumformungen aus A erhalten. Hier E_1, E_2, E_3 sind $n \times n$-Matrizen, d.h. $E_1 = E_1(n, j_1, j_2)$ etc.
c) Die Matrizen E_1, E_2, E_3 sind invertierbar.

3. Man betrachte die naturliche Zahlen $1 \leq m' \leq m$, $1 \leq n' \leq n$ und $1 \leq p' \leq p$ und die Matrizen $A_1 \in \mathcal{M}_{m' \times n'}(K)$, $A_2 \in \mathcal{M}_{m' \times (n-n')}(K)$, $A_3 \in \mathcal{M}_{(m-m') \times n'}(K)$, $A_4 \in \mathcal{M}_{(m-m') \times (n-n'))}(K)$ und $B_1 \in \mathcal{M}_{n' \times p'}(K)$, $B_2 \in \mathcal{M}_{n' \times (p-p')}(K)$, $B_3 \in \mathcal{M}_{(n-n') \times p'}(K)$, $B_4 \in \mathcal{M}_{(n-n') \times (p-p')}(K)$. Man bilde die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Man zeige dass

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_3 + A_2 B_4 \\ A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{pmatrix}.$$

4. Man wende (nur) Zeilenumformungen um die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

in der Einheitmatrix zu transformieren. Dieselbes Problem für Spaltenumformungen.

5. Man bezeichne $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K) \mid A \text{ invertierbar ist}\}$. Ist $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ aus der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

wobei $A_1 \in \mathcal{M}_{p\times p}(K)$ und $A_4 \in \mathcal{M}_{q\times q}(K)$, mit $p + q = n$, so sind die folgende Aussagen äquivalent:

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$;

(ii) $\left(A_4 \in \mathrm{GL}_q(K) \text{ und } A_1 - A_2A_4^{-1}A_3 \in \mathrm{GL}_p(K)\right)$ oder
$\left(A_1 \in \mathrm{GL}_p(K) \text{ und } A_4 - A_3A_1^{-1}A_2 \in \mathrm{GL}_q(K)\right)$.

Sind A und A_4 invertierbar, so bestimme man A^{-1} mit der Hilfe von A_4^{-1} und $(A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`